

SÉRIE A, n° 3236

N° D'ORDRE :
4108

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

Par Simone GOHIER

1^{re} THÈSE. — RIGIDITÉS DES SURFACES CONVEXES A BORDS.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 1^{er} juin 1956 devant la Commission d'examen.

MM. VILLAT

Président.

G. DARMOIS

LICHNEROWICZ

} *Examineurs.*

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

Quai des Grands-Augustins, 55

—
1959

SÉRIE A, N° 3236

N° D'ORDRE :
4108

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

Par Simone GOHIER

1^{re} THÈSE. — RIGIDITÉS DES SURFACES CONVEXES A BORDS.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 1^{er} juin 1956 devant la Commission d'examen.

MM. VILLAT

Président.

G. DARMOIS

LICHNEROWICZ

} *Examineurs.*



PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

Quai des Grands-Augustins, 55

1959

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen M. J. PÉRÈS.

PROFESSEURS

G. JULIA.....	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	DE CUGNAC.....	Biologie végétale (P. C. B.).
E. DARMOIS.....	T	Enseignement de Physique.	M ^{lle} CAUCHOIS.....	T Chimie physique.
FOCH.....	T	Mécanique physique et expérimentale.	THELLIER.....	T Physique du Globe.
PAUTHENIER.....	T	Électrotechnique générale.	AUDUBERT.....	T Electrochimie.
DE BROGLIE.....	T	Théories physiques.	L'HÉRITIER.....	T Génétique.
JOB.....	T	Chimie générale.	GRIVET.....	T Radioélectricité.
PRENANT.....	T	Anatomie et Histologie comparées.	PONCIN.....	T Mécanique des fluides.
GARNIER.....	T	Géométrie supérieure.	THIRY.....	T Mécanique appliquée.
PÉRÈS.....	T	Mécanique des fluides et applications.	DUBREIL.....	T Arithmétique et théorie des nombres.
LAUGIER.....	T	Physiologie générale.	QUELET.....	T Chimie organique.
M. CURIE.....	T	Physique (P. C. B.).	CAGNIARD.....	T Géophysique appliquée.
BARRABÉ.....	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.	CHAMPETIER.....	T Chimie macromoléculaire.
G. DARMOIS.....	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.	CUVILLIER.....	T Géologie structurale et Géologie appliquée.
JACQUES BOURCART.....	T	Géographie physique et Géologie dynamique.	JUNG.....	T Pétrographie.
PLANTEFOL.....	T	Botanique.	TRILLAT.....	T Microscopie et diffraction électronique.
GRASSE.....	T	Évolution des êtres organisés.	WIEMANN.....	T Chimie organique et structurale.
PRÉVOST.....	T	Chimie organique.	JACQUINOT.....	T Spectroscopie et Physique céleste.
BOULIGAND.....	T	Applications de l'Analyse à la Géométrie.	VASSY.....	Physique de l'atmosphère.
CHAUDRON.....	T	Chimie appliquée.	DESTOUCHES.....	Théories physiques.
WYART.....	T	Minéralogie.	M. PRUVOST.....	T Géologie.
TEISSIER.....	T	Zoologie.	AMIEL.....	T Chimie (P. C. B.).
MANGENOT.....	T	Biologie végétale.	HOCART.....	T Minéralogie.
P. AUGER.....	T	Physique quantique et Relativité.	J. P. MATHIEU.....	T Physique (P. C. B.).
MONNIER.....	T	Physiologie des fonctions.	COUTEAUX.....	T Biologie animale (P. C. B.).
PIVETEAU.....	T	Géologie.	MAY.....	T Biologie animale (P. C. B.).
ROCARD.....	T	Physique (E. N. S.).	CHOQUET.....	T Calcul différentiel et intégral.
H. CARTAN.....	T	Mathématiques (E. N. S.).	FELDMANN.....	Biologie (P. C. B.).
LAFFITTE.....	T	Chimie générale.	GUINIER.....	T Physique (P. C. B.).
FAVARD.....	T	Mécanique générale.	JOST.....	T Biologie (P. C. B.).
COULOMB.....	T	Physique du Globe.	FORTET.....	T Calcul des probabilités.
M ^{lle} COUSIN.....	T	Biologie animale (P. C. B.).	SCHWARTZ.....	T Méthodes mathématiques de la Physique.
CHRETIEN.....	T	Chimie minérale.	CHOUARD.....	T Physiologie végétale.
P. DRACH.....	T	Zoologie.	MALAVARD.....	T Aviation.
KASTLER.....	T	Physique.	BRELOT.....	T Calcul différentiel.
EPHRUSSI.....	T	Génétique.	NORMANT.....	T Chimie (P. C. B.).
WURMSER.....	T	Biologie physicochimique.	BENARD.....	T Chimie (P. C. B.).
RIVIÈRE.....	T	Géologie (S. P. C. N.).	BUVAT.....	T Botanique (E. N. S.).
GAUTHIERET.....	T	Biologie végétale (P. C. B.).	DUGUE.....	T Statistiques mathématiques.
LUCAS.....	T	Recherches Physiques.	GELOSO.....	T Chimie (S. P. C. N.).
A. THOMAS.....	T	Biologie cellulaire.	SOULAIRAC.....	T Psychophysiologie.
ARNULF.....	T	Optique appliquée.	ULRICH.....	T Physiologie végétale.
MAX MORAND.....	T	Physique.	MARECHAL.....	T Optique théorique et appliquée.
SOLEILLET.....	T	Physique.	KIRRMANN.....	T Théories chimiques.
FORTIER.....	T	Mécanique expérimentale des fluides.	CHADEFAUD.....	Botanique.
DANJON.....	T	Astronomie.	DESTRIAU.....	Physique (M. P. C.).
FROMAGEOT.....	T	Chimie biologique.	M ^{lle} LE BRETON.....	Physiologie générale.
LAPORTE.....	T	Physique générale et Radioactivité.	SALEM.....	Mathématiques générales.
JANET.....	T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.	LELONG.....	T Mathématiques générales.
PETIT.....	T	Biologie maritime.	DEVILLIERS.....	Anatomie et Histologie comparée.
QUENEY.....	T	Météorologie et Dynamique atmosphérique.	EHRESMANN.....	Topologie algébrique.
GALLIEN.....	T	Embryologie.	FRANCON.....	Physique (M. P. C.).
EICHHORN.....	T	Biologie végétale (P. C. B.).	GLANGEAUD.....	Géographie physique et géologie dynamique.
			GODEMENT.....	Mathématiques (M. P. C.).
			PISOT.....	Calcul des probabilités.
			B. ROCH.....	Géologie.
			SCHATZMANN.....	Astrophysique.
			TERMIER.....	Paléontologie stratigraphique.
			ZAMANSKY.....	Mathématiques générales.

Secrétaire Général..... CH. MONIER.

TABLE DES MATIÈRES

	Pages.
INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE I.....	6
1. Exposé de la méthode de Herglotz.....	7
2. Discussion suivant le signe de K	10
3. Rigidité d'une surface convexe close.....	11
4. Cas des surfaces convexes à bords.....	13
5. Cas d'une calotte à bord plan.....	14
6. Surfaces à K nulle.....	15
7. Méthode de variation de l'origine.....	16
CHAPITRE II.....	18
1. Définition de la rigidité infinitésimale.....	18
2-3. Formule de Blaschke.....	19
4. R. I. des surfaces à bords R.....	22
CHAPITRE III.....	24
1. R. G. d'une surface convexe tangente à une sphère le long de son bord.....	25
CHAPITRE IV.....	26
1. Existence des surfaces Σ	26
2. Quelques définitions.....	27
3. Lemmes I et II, théorème XI.....	28
4. Rigidité des surfaces.....	29
5-6. Théorème d'A. D. Alexandrov.....	30
7. Remarque sur la courbure intégrale d'une surface U	32
BIBLIOGRAPHIE.....	33



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555825_0044

PREMIÈRE THÈSE.

RIGIDITÉS

DES

SURFACES CONVEXES A BORDS

INTRODUCTION.

Dans ce travail, nous serons amenée à considérer deux sortes de surfaces, qu'il est préférable de définir dès maintenant :

1° On appelle surface plongée dans l'espace euclidien ordinaire E_3 de dimension 3, un ensemble F de points de E_3 sur lequel la topologie de E_3 induit une structure de variété de dimension 2, c'est-à-dire tel que :

a. chacun des points de F possède un voisinage homéomorphe à un disque euclidien ouvert;

b. il y a connexité par arcs : deux points quelconques peuvent être joints par un chemin de F .

Si $A, B \in F$ peuvent être joints par un chemin de longueur euclidienne finie, il existe une limite inférieure de cette longueur qui prend le nom de *distance de A à B sur la surface F*.

Cette distance satisfait aux propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}\rho(AB) &= 0 && \text{entraîne } A = B, \\ \rho(AB) &= \rho(BA), \\ \rho(AB) + \rho(BC) &\geq \rho(AC).\end{aligned}$$

Notre surface est alors un espace métrique, de métrique ρ . Si, entre deux surfaces F et F^* , de métriques respectives ρ et ρ^* , il existe un homéomorphisme

tel que

$$\rho(AB) = \rho^*(A^*B^*)$$

pour A et B quelconques, les deux surfaces sont *isométriques*.

2° Une classe très restreinte de surfaces est celle des surfaces différentiables : ce sont des variétés différentiables de dimension 2, plongées différentiablement et régulièrement dans E_3 ; O étant un point fixe de E_3 , il existe sur F des systèmes de coordonnées locales $(x^i x^j)$ telles que $\overrightarrow{OM}(M \in F)$ est une fonction C^n (n fois continûment dérivable) de ces coordonnées

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r}(x^i x^j).$$

Pour que deux surfaces différentiables soient isométriques, il faut et il suffit qu'elles possèdent le même élément linéaire

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (i, j = 1, 2).$$

Pour les hypersurfaces différentiables d'un espace euclidien de dimension quelconque, on connaît le théorème de plongement énoncé par Eisenhart [1] qui pose le problème en termes très simples :

THÉOREME I. — *Pour que*

$$\begin{aligned} \varphi &= g_{ij} dx^i dx^j, \\ \psi &= B_{ij} dx^i dx^j \end{aligned}$$

soient les première et deuxième formes fondamentales de V_n plongée dans E_{n+1} réel, il faut et il suffit que soient satisfaites les équations de Gauss-Codazzi :

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= e(B_{ik}B_{jl} - B_{il}B_{jk}), \\ B_{ij,k} - B_{ik,j} &= 0, \end{aligned}$$

V_n est alors déterminée à un déplacement près dans E_{n+1} .

Lorsque, d'une part, le plongement de V_n dans E_{n+1} est possible, et que, d'autre part, V_n est déterminé à une transformation orthogonale près, par sa première forme fondamentale, on dit que V_n est (globalement) *rigide* dans E_{n+1} . Il est équivalent de dire qu'une surface est rigide si toute surface qui lui est isométrique est égale ou symétrique.

Cette dernière définition de la rigidité est la seule valable dans le cas où la surface n'est pas différentiable (cas du 1°).

Le théorème I permet de prouver aisément la rigidité de toute hypersurface différentiable de E_{n+1} pour $n > 2$, R_{ijkl} étant déterminé par les g_{ij} , sous la condition que trois au moins des rayons de courbure principaux soient finis.

L'espace euclidien ordinaire fait exception et, *a priori*, une surface quelconque n'est pas rigide. Ce résultat n'est pas pour nous étonner : nous avons tous l'expérience de surfaces faites de matière mince, flexible et inextensible, et qui peuvent subir des déformations.

Cependant, nous avons également l'expérience, ou l'intuition, de surfaces indéformables dans les mêmes conditions, par exemple la sphère. Il y a donc un partage à faire parmi toutes les surfaces possibles de l'espace ordinaire; ce qui se traduit dans le cas différentiable, par la recherche de conditions supplémentaires qui, jointes aux équations de Gauss-Codazzi, définissent sans équivoque la seconde forme fondamentale à partir de la première. On est ainsi amené à définir des classes de surfaces S , telles que, une surface est rigide si on lui impose de satisfaire aux conditions qui définissent la classe S (par exemple la classe des surfaces différentiables convexes closes).

Dès l'Antiquité, les géomètres se sont posé le problème de la rigidité, mais seulement pour les surfaces qu'ils connaissaient, en particulier les polyèdres. Ils étudièrent les polyèdres isomorphes, et Euclide affirma le premier qu'il n'existe qu'un seul polyèdre possédant des faces données, disposées dans un ordre donné. De cette affirmation, la première démonstration, d'une clarté remarquable, fut donnée par Cauchy [2] en 1813; cette démonstration utilise exclusivement des résultats de géométrie élémentaire. La question en resta là jusqu'à la fin du XIX^e siècle. Avant qu'elle puisse être abordée sous un angle nouveau, il fallut tout le développement de la géométrie différentielle classique à la suite des travaux de Gauss, et de l'analyse. Le premier problème résolu par les nouvelles méthodes fut celui de la rigidité de la sphère : en 1899 par Liebmann. En 1917, donc plus d'un siècle après Cauchy, H. Weyl [3] donna une nouvelle démonstration de la rigidité des polyèdres, qui si elle ne possède pas l'élégance de celle de Cauchy, a le mérite très important de pouvoir s'étendre aux surfaces closes convexes, à courbure continue. Weyl ne fut pas suivi dans sa tentative de jeter un pont entre les deux sortes de surfaces, celles de la géométrie élémentaire et celles de la géométrie différentielle; jusqu'à ces dernières années on étudia à peu près exclusivement la rigidité des surfaces différentiables, et parmi celles-ci on est parvenu à des résultats principalement pour les surfaces convexes. En 1927, Cohn-Vossen, en 1943 Herglotz [4] prouvèrent par des méthodes différentes la rigidité des surfaces closes convexes différentiables de classe C^3 .

Depuis quelques années, les développements de l'analyse moderne, de la topologie, de la théorie des ensembles, ont donné un sens nouveau, très large, à la notion de fonction, et fait tomber définitivement les barrières entre les deux espèces de surfaces; ces dernières ne constituent plus que deux classes assez restreintes de l'ensemble de toutes les surfaces qui peuvent être envisagées, et la géométrie différentielle classique devient une branche de la géométrie dite intégrale. C'est ainsi qu'un théorème de Pogorelov [5] résout définitivement le problème de la rigidité des surfaces closes convexes, en élargissant le théorème de Cohn-Vossen à toute surface close convexe, (telle que nous la définirons plus loin).

Il existe, à côté des problèmes de rigidité que nous venons d'envisager, des

problèmes voisins mais distincts par leurs méthodes et leurs résultats; ce sont :

1° *La rigidité locale* ou rigidité pour un voisinage suffisamment petit d'un point d'une surface. Darboux [6] a montré que le voisinage d'un point arbitraire d'une surface analytique est non rigide.

2° *La rigidité infinitésimale* : On étudie les possibilités de déformation d'une surface à partir d'une position donnée, chaque point subissant un déplacement infiniment petit. Il y a *déformation infinitésimale* si, après le déplacement individuel de chaque point, la longueur d'une courbe arbitraire de la surface a varié d'une quantité infiniment petite, d'ordre supérieur à l'ordre du déplacement. Si les déplacements de tous les points conduisent à un déplacement global de la surface on dit qu'elle est *infinitésimalement rigide*. Nous définirons de façon plus précise ces notions au chapitre II.

La rigidité infinitésimale des surfaces a été étudiée notamment par W. Blaschke, N. Efimov, E. Rembs; W. Blaschke [7] a prouvé qu'une surface close convexe, de classe C^3 est infinitésimalement rigide.

Pour la distinguer de ces deux autres rigidités, nous appellerons la rigidité que nous avons considérée en premier lieu : rigidité globale, ou en abrégé : R.G.; une surface globalement rigide sera dite G. R. De même, les abréviations R. I. et I. R. signifient respectivement : rigidité infinitésimale et infinitésimalement rigide.

On pourrait croire, et les résultats cités semblent nous y inviter, que la R. I. d'une surface est la conséquence de sa R. G.; un exemple simple prouve que ceci est inexact :

Soit un cercle dont la circonférence est fixée, il est évidemment G. R., cependant il n'est pas I. R.; en effet, on peut soumettre chacun de ses points à un déplacement infinitésimal, perpendiculaire au plan du cercle, et qui tend vers zéro sur le bord du cercle; les conditions de la déformation infinitésimale, c'est-à-dire de la non R. I. sont remplies.

Cependant nous constaterons une analogie certaine dans l'établissement des formules qui permettent de conclure à la R. I. ou à la R. G. d'une surface.

Nous considérerons toujours par la suite des surfaces « lisses », c'est-à-dire partout de classe C^1 . Cependant nous serons amenée à utiliser le théorème de Pogorelov relatif à une surface convexe du type défini en 1°.

Il nous faut maintenant définir la notion de convexité globale d'une surface de E_3 .

Une *surface convexe* est la frontière ou toute partie connexe de la frontière d'un corps convexe (ensemble de points de E_3 qui contient tous les points d'un segment quand il en contient les extrémités).

De cette définition résulte, comme le montre Alexandrov [8] que :

- a. une surface convexe est douée d'une métrique ; le problème de la R. G. a donc un sens pour cette surface ;
- b. la frontière entière d'un corps convexe est une surface complète en ce sens que tout ensemble infini borné, admet un point d'accumulation situé sur la surface.

Pour une surface différentiable nous définissons la courbure de Gauss par l'équation de Gauss citée dans le théorème I. La *courbure intégrale* d'une surface connexe Δ , de courbure de Gauss K , d'élément de surface do , est égale à la valeur de l'intégrale

$$\iint_{\Delta} K \, do.$$

Si δ est l'image sphérique de Δ et dv l'élément d'aire de la sphère unité, cette intégrale est égale à

$$\iint_{\delta} dv,$$

c'est-à-dire à l'aire de l'image sphérique du domaine δ . La condition de *convexité locale* pour une surface C^2 est de posséder une courbure de Gauss positive.

En général il n'y a aucune équivalence entre les deux conditions de convexités locale ou globale. Un théorème de Hadamard [9] détermine une classe de surfaces pour lesquelles l'une est conséquence de l'autre.

THÉORÈME II. — *Si une surface est close et à courbure de Gauss partout continue et positive, elle est (globalement) convexe.*

Remarquons qu'on peut étendre le théorème aux surfaces à $K \geq 0$ qui contiennent un ensemble dense de points à courbure de Gauss positive.

Ici, nous utilisons la méthode qui a permis à Herglotz [4] de démontrer la R. G. des surfaces closes convexes C^3 , pour prouver la R. G. de certaines surfaces convexes à bords C^2 . Nous parviendrons à des résultats plus complets en employant conjointement le théorème de Pogorelov [5] :

THÉORÈME III. — *Une surface close convexe quelconque est G. R.*

Dans le chapitre I nous exposons la méthode de Herglotz et les résultats immédiats qu'on peut en tirer pour des surfaces à bords ; en particulier celles qui sont tout le long de leurs bords, soit tangentes à une sphère, soit tangentes à un cylindre de révolution, ou les surfaces qui ont une courbure de Gauss positive ou même nulle, sur un ensemble dense de points.

Dans le chapitre II nous définissons la R. I. et nous appliquons la formule de

Blaschke pour démontrer la R. I. de certaines surfaces R définies dans ce chapitre.

Dans le chapitre III nous étudions plus particulièrement la R. G. d'une surface convexe tangente tout le long de son bord à une sphère, rigidité déjà étudiée en certains cas au chapitre I, mais démontrée complètement en faisant appel au théorème de Pogorelov.

Enfin, au chapitre IV, nous définissons une classe de surfaces convexes à bords, de courbure intégrale 4π ; nous montrerons qu'elles sont G. R.; en application directe de cette étude, nous retrouvons un théorème d'A. D. Alexandrov sur des surfaces closes homéomorphes au tore. Ce théorème détermine la condition pour que les lignes frontières séparant les parties à courbure de Gauss de signes opposés soient des courbes planes. Nous montrons que dans ce cas, la courbure intégrale de la partie à courbure de Gauss positive atteint son minimum 4π .

Je tiens à exprimer à M. Henri Villat toute ma reconnaissance pour l'honneur qu'il me fait en présidant ce Jury.

J'ai été dirigée vers ces problèmes par M. André Lichnerowicz qui a suivi ce travail avec sollicitude, qui m'a apporté l'aide de ses critiques rigoureuses et l'exemple d'une pensée mathématique très étendue. Je suis heureuse de lui témoigner en cette occasion, toute ma gratitude.

Je remercie également M. Georges Darmon pour la bienveillance avec laquelle il a accueilli ce projet de thèse; et enfin M. Eduard Rembs, de Berlin, éminent spécialiste de ces questions depuis de longues années, qui m'a fait le très grand plaisir de manifester de l'intérêt pour ma première publication et qui n'a cessé depuis de me prodiguer ses conseils et ses encouragements.

CHAPITRE I.

L'intérêt de l'élégante méthode suivie par Herglotz dans l'Ouvrage cité [4], est de déduire de la propriété R. G. d'une surface, du fait qu'une certaine intégrale, prise sur son bord, est non positive. Dans le seul cas envisagé par l'auteur, celui d'une surface sans bord, la condition ci-dessus est automatiquement remplie, puisque l'intégrale disparaît. Cependant, depuis, E. Rembs [10] et K. P. Grottemeyer [11] ont déterminé des surfaces avec bords, pour lesquels la condition est satisfaite. A l'exposé de Herglotz lui-même, rapide, mais qui met au second plan le contenu de l'intégrale qui nous intéresse (parce que ce contenu importait peu à l'auteur), nous préférons celui de Grottemeyer. Si sa méthode est plus compliquée en apparence, elle présente l'avantage d'utiliser des notations tensorielles, susceptibles de généralisation, et surtout de donner à l'intégrale de bord une forme qui peut être clairement interprétée en termes géométriques.

I. EXPOSÉ DE LA MÉTHODE DE HERGLOTZ. — Nous désignons par F et F^* deux surfaces C^3 , supposées isométriques, donc possédant la même première forme fondamentale.

A tout élément T , tenseur ou vecteur de F , correspond un élément T^* , défini de la même façon relativement à F^* .

Si les surfaces ne sont pas égales, l'homéomorphie ainsi définie ne coïncide pas avec l'application isométrique de F sur F^* , qui fait correspondre non seulement les points des surfaces mais aussi les vecteurs tangents. Nous désignerons par $\bar{V}^*$ le vecteur de F , isométrique du vecteur V^* de F^* , et par $\bar{V}$ le vecteur de F^* , isométrique du vecteur V de F .

Supposons les surfaces représentées par

$$r(u^1, u^2) \quad \text{et} \quad r^*(u^1, u^2).$$

Dans la suite nous désignerons par :

$|k$ la différentiation ordinaire par rapport au paramètre u^k ;

$\mathcal{A}$ la différentiation covariante par rapport au même paramètre;

$\dot{x}$ la dérivée de x par rapport à l'abscisse curviligne s sur la courbe bord.

A. On définit les tenseurs

$$\begin{aligned} g_{ik} &= (r_i r_k) \quad (i, k, \dots = 1, 2), \\ g &= |\mathcal{A} g_{ik}|, \end{aligned}$$

g est défini positif, on pose

$$g = \Delta^2, \quad r_i = \frac{dr}{du^i},$$

les g_{ik} sont les coefficients de la première forme fondamentale de F ; on a ici

$$g_{ik} = g_{ik}^*.$$

Le vecteur unitaire de la normale est défini par

$$\xi = \frac{r_1 \wedge r_2}{|r_1 \wedge r_2|} = \frac{r_1 \wedge r_2}{\Delta}.$$

On a

$$B_{ik} = (\xi r_{i|k}),$$

les B_{ik} , coefficients de la seconde forme fondamentale de F , sont les symboles de Christoffel de plongement : Γ_{ik}^3 . On sait que ce sont des tenseurs par rapport aux indices inférieurs.

D'après l'équation de Gauss, on a

$$\frac{|\mathcal{A} B_{ik}|}{g} = \kappa.$$

D'après le théorème I, il suffira de montrer que

$$B_{ik} = B_{ik}^*,$$

chacun de ces tenseurs satisfaisant aux équations de Codazzi, pour démontrer l'égalité de F et F^* .

B. Nous nous servirons de la relation suivante :

$$(1) \quad r_{i,k} = B_{ik} \zeta$$

et de la relation de Codazzi :

$$(2) \quad B_{ik,l} - B_{il,k} = 0,$$

ainsi que de la formule de Stokes :

$$(3) \quad \iint_D C^k_{,k} do = - \oint_{\partial D} C^k n_k ds,$$

où $C^k(u^i)$ est un champ continuellement différentiable de vecteurs, D est un domaine d'une surface C^3 limité par une courbe C^1 (∂D), le sens de parcours sur ∂D est choisi de façon que, lorsqu'on regarde dans la direction de la normale positive à D , on laisse D à gauche, do est l'élément d'aire de D , et ds l'élément linéaire de la courbe bord.

On pose

$$\begin{aligned} C_{ik} &= B_{ik} - B_{ik}^*, \\ B^{ik} &= \varepsilon^{i\alpha} \varepsilon^{k\beta} B_{\alpha\beta}, \\ \varepsilon_{ik} &= (\zeta r_i r_k). \end{aligned}$$

On a, dans le cas envisagé :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12} &= -\varepsilon_{21} = \Delta, \\ \varepsilon^{12} &= -\varepsilon^{21} = \frac{1}{\Delta}, \\ \varepsilon_{11} &= \varepsilon_{22} = \varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = 0, \\ B^{11} &= \frac{1}{\varepsilon'} B_{22}, \\ B^{12} &= -\frac{1}{\varepsilon'} B_{12}, \\ B^{22} &= \frac{1}{\varepsilon'} B_{11}. \end{aligned}$$

C. Ecrivons sous forme tensorielle les grandeurs connues :

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} B_{ik} B^{ik}, \\ H &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ik} B^{ik} \quad (\text{courbure moyenne}), \\ J &= B_{ik}^* B^{ik} = B_{ik} B^{*ik}. \end{aligned}$$

On obtient aisément les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\|C_{ik}\|}{\varepsilon} &= (B_{ik} - B_{ik}^*) (B^{ik} - B^{*ik}) = 2K - J, \\ B^{ik} C_{ik} &= B_{ik} C^{ik} = 2K - J, \end{aligned}$$

d'où

$$(4) \quad \frac{\|C_{ik}\|}{g} = C^{ik} B_{ik}.$$

D'autre part, la relation de Codazzi s'écrit

$$B^{ik}_{,k} = 0,$$

d'où

$$(2 \text{ bis}) \quad C^{ik}_{,k} = 0.$$

De (1), (4) et (2 bis), on déduit l'équation

$$(5) \quad (C^{ik} r_i)_{,k} = \frac{\|C_{ik}\|}{g} \xi.$$

Par intégration sur F, en appliquant la formule (3), on obtient l'équation fondamentale

$$(6) \quad \iint_F \frac{\|C_{ik}\|}{g} \xi \, d\sigma = - \oint C^{ik} r_i n_k \, ds.$$

D. Étudions d'abord l'intégrale de bord qui figure au second membre de (6).

Nous définissons le vecteur unitaire η de façon que le système

$$r, \quad \eta, \quad \xi$$

soit orthogonal et normé.

L'expression figurant au second membre de (6) représente un vecteur du plan tangent à F; posons

$$C^{ik} r_i n_k = \alpha \dot{r} + \beta \eta,$$

n^k est le vecteur normal intrinsèque à la courbe bord et $\dot{u}^i$ est le vecteur tangent intrinsèque.

En utilisant les relations

$$\begin{aligned} n_k &= \varepsilon_{ik} \dot{u}^i, \\ g_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k &= 1, \\ B_{ik} \dot{u}^i n^k &= a, \\ B_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k &= b \end{aligned}$$

(a et b sont respectivement la torsion géodésique et la courbure normale de la courbe bord), on trouve l'expression de Grotemeyer :

$$- C^{ik} r_i n_k = (a - \alpha^*) \dot{r} - (b - b^*) \eta$$

qui peut encore s'écrire sous une autre forme; en effet on a

$$\frac{d\xi}{ds} = -b\dot{r} - a\eta,$$

d'où

$$\begin{aligned} a\dot{r} - b\eta &= \xi \wedge (-b\dot{r} - a\eta) = \xi \wedge \frac{d\xi}{ds}, \\ (a^*\dot{r} - b^*\eta) \, ds &= \overline{\xi^* \wedge d\xi^*}. \end{aligned}$$

L'intégrale de Herglotz prend alors l'une ou l'autre des formes

$$(I_1) \quad \iint_F \frac{\|C_{ik}\|}{g} \zeta \, d\sigma = \oint [(a - a^*) \dot{r} - (b - b^*) \eta] \, ds,$$

$$(I_2) \quad \iint_F \frac{\|C_{ik}\|}{g} \zeta \, d\sigma = \oint (\xi \wedge d\zeta - \overline{\zeta^*} \wedge d\overline{\zeta^*}).$$

2. DISCUSSION SUIVANT LE SIGNE DE K. — Étudions le signe du déterminant

$$\frac{\|C_{ik}\|}{g}$$

et posons

$$\frac{1}{\sqrt{g}} B_{11} = X,$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} B_{12} = Y,$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} B_{22} = Z,$$

en développant il vient

$$\frac{\|C_{ik}\|}{g} = \begin{vmatrix} X - X^* & Y - Y^* \\ Y - Y^* & Z - Z^* \end{vmatrix} = f.$$

Considérons la famille de quadriques Q ayant pour équations en coordonnées cartésiennes

$$XZ - Y^2 - K = 0,$$

K variant de façon continue d'après les hypothèses de différentiabilité faites sur F.

Deux points P(X, Y, Z) et P*(X*, Y*, Z*) sont conjugués par rapport à une quadrique Q si leurs coordonnées satisfont à la relation suivante :

$$XZ^* - 2YY^* + ZX^* - 2K = 0,$$

c'est-à-dire à

$$(-f) = 0.$$

Supposons P fixé, l'équation précédente représente le plan conjugué de P par rapport à Q; l'expression f conserve un signe constant si P* reste dans le même demi-espace limité par le plan conjugué (pour connaître ce signe il suffit de placer P* à l'origine).

Or, d'après les relations de Gauss :

$$\frac{\|B_{ik}\|}{g} = \frac{\|B_{ik}^*\|}{g} = K,$$

P et P* se trouvent donc sur la même quadrique Q. Trois cas sont à envisager suivant la nature de cette quadrique :

a. $K > 0$. — Les quadriques Q sont des hyperboloïdes à deux nappes,

symétriques l'une de l'autre par rapport à l'origine des coordonnées et au plan

$$X + Z = 0.$$

On constate que f est positive si P et P^* sont sur deux nappes différentes et négative s'ils sont sur la même nappe; or, si nous orientons la normale ξ du côté concave de F , ce qui a un sens puisque nous supposons la courbure de Gauss positive en tout point, B_{11} et B_{22} sont égales à un facteur positif près aux courbures normales le long des lignes coordonnées, et sont donc positives. Il en est de même des grandeurs X , X^* , Y , Y^* . Par suite P et P^* se trouvent sur la même nappe de Q , dans le dièdre limité par les demi-plans

$$Z = 0, \quad X > 0 \quad \text{et} \quad X = 0, \quad Z > 0.$$

Dans ce cas on arrive à la conclusion *f est négative, si P et P^* sont distincts, et ne peut être nulle que si P et P^* sont confondus.*

b. $K < 0$. — Les quadriques Q sont des hyperboloïdes réglés; en chacun de leurs points elles sont traversées par le plan tangent, P et P^* étant tous les deux sur Q , on ne peut savoir s'ils sont ou non du même côté du plan tangent en P , ni par suite déterminer le signe de f . Il en résulte que la méthode de Herglotz, qui repose sur l'hypothèse d'un signe constant de f , ne peut s'appliquer aux surfaces à courbure de Gauss négative sur un domaine d'aire non nulle.

c. $K = 0$. — Les quadriques Q sont des cônes ayant leur sommet à l'origine. Les conclusions sont à peu près les mêmes que dans le cas *a*, c'est-à-dire : f est négative si P et P^* sont sur une même nappe de Q et positive s'ils sont sur deux nappes différentes à la condition qu'ils ne se trouvent pas sur une même génératrice. Dans cette éventualité, en effet f est nulle, et l'on a

$$(7) \quad \frac{X^*}{X} = \frac{Y^*}{Y} = \frac{Z^*}{Z} = \lambda,$$

avec λ positif si les courbures normales correspondantes sur F et F^* ont le même signe.

La différence essentielle entre les cas *a* et *c* réside dans le fait que, $f = 0$ entraîne dans le premier cas : P et P^* sont confondus, tandis que dans le dernier on ne peut que conclure : P et P^* sont sur une même génératrice de Q c'est-à-dire la relation (7) est vérifiée.

Cependant, supposons que F (et par suite F^*), aient une courbure $K \geq 0$ (l'ensemble des points à $K > 0$ est partout dense) si d'autres considérations imposent $f = 0$ partout, $\lambda = 1$ aux points où la courbure de Gauss est positive, et, par continuité on peut conclure que $\lambda = 1$ en tout point.

3. RIGIDITÉ D'UNE SURFACE CONVEXE CLOSE. — C'est cette dernière hypothèse que nous ferons toujours quand nous considérerons des surfaces à courbure de

Gauss positive (nous avons déjà remarqué que le théorème II de Hadamard peut justement s'étendre aux surfaces où K s'annule en des points isolés et est positive partout ailleurs). Si, de plus, la surface est globalement convexe, il existe au moins un point intérieur au corps convexe qui admet la surface pour frontière et qu'aucun plan tangent ne traverse. Nous prendrons un tel point pour origine du vecteur r .

Multiplions scalairement les deux termes de l'équation fondamentale (5) par r . Le vecteur unitaire de la normale ξ étant orienté vers l'intérieur de F , le produit scalaire (ξr) est négatif pour tout point de F . L'équation (5) devient

$$(C^{ik} r_i r)_{,k} - C^{ik} g_{ik} = \frac{\|C_{ik}\|}{g} (r\xi),$$

ou

$$C^{ik} g_{ik} = 2H - 2H^*.$$

D'où par intégration sur la surface F :

$$(I_2) \quad \iint_F \frac{\|C_{ik}\|}{g} (r\xi) do = - \iint_F (2H - 2H^*) do \\ + \oint [(a - a^*) r\dot{r} - (b - b^*) r\eta] ds$$

ou

$$(I_4) \quad \iint_F \frac{\|C_{ik}\|}{g} (r\xi) do = - \iint_F (2H - 2H^*) do \\ + \oint r(\xi \wedge d\xi - \overline{\xi^* \wedge d\xi^*}).$$

Nous avons de même pour la seconde surface :

$$(I_5) \quad \iint_{F^*} \frac{\|C_{ik}^*\|}{g} (r^*\xi^*) do = \iint_{F^*} (2H - 2H^*) do \\ + \oint [(a^* - a) r^*\dot{r}^* - (b^* - b) r^*\eta^*] ds$$

ou

$$(I_6) \quad \iint_{F^*} \frac{\|C_{ik}^*\|}{g} (r^*\xi^*) do = \iint_{F^*} (2H - 2H^*) do + \oint r^*(\xi^* \wedge d\xi^* - \overline{\xi \wedge d\xi}).$$

D'après l'étude faite au paragraphe 2, les premiers membres de toutes ces équations sont positifs.

En ajoutant membre à membre I_3 et I_4 , ou I_4 et I_6 , on élimine l'intégrale de surface des seconds membres. Il vient alors

$$(I_7) \quad \iint_{F^*} \frac{\|C_{ik}\|}{g} [(r\xi) + (r^*\xi^*)] do \\ = \oint (a - a^*) (r\dot{r} - r^*\dot{r}^*) - (b - b^*) (r\eta - r^*\eta^*) ds$$

ou

$$(I_8) \quad \iint_F \frac{\|C_{ik}\|}{g'} [(r\xi) + (r^*\xi^*)] do \\ + \oint [r(\xi \wedge d\xi - \overline{\xi \wedge d\xi}) + r^*(\xi^* \wedge d\xi^* - \overline{\xi^* \wedge d\xi^*})].$$

Dans le cas d'une surface close (Herglotz), l'intégrale de bord disparaît, et comme l'on a en tout point

$$(r\xi) + (r^*\xi^*) < 0,$$

on en déduit que, partout

$$\frac{\|C_{ik}\|}{g'} = 0$$

D'après l'étude du paragraphe 2, on a alors

$$f = 0,$$

les points figuratifs P et P* sont alors (a du paragraphe 2) nécessairement confondus. D'où

$$B_{ik} = B_{ik}^*.$$

4. CAS DES SURFACES CONVEXES A BORDS. — Si F et F* ont un ou plusieurs bords, et si l'intégrale du second membre de (I₇) ou de (I₈) prise le long des bords, est nulle ou négative, nous arrivons au même résultats : F est G. R.

On obtient immédiatement les théorèmes suivants qui définissent chacun une classe de rigidité dans l'ensemble des surfaces :

THÉORÈME IV. — *Si une surface C³, à courbure de Gauss positive, a un bord fixé, ou un bord à courbure normale et torsion géodésique constants, elle est G. R. [12].*

En effet, si partout

$$a = a^* \quad \text{et} \quad b = b^*,$$

l'intégrale de bord de (I₇) est nulle.

THÉORÈME V. — *Si une surface convexe C³ à courbure de Gauss positive, a un bord situé dans un plan, et est tangente à ce plan tout le long du bord (bord plan-parabolique), elle est G. R. [13].*

En effet, pour tout point du bord, on a

$$d\xi = d\xi^* = 0$$

et l'intégrale de bord de (I₈) est nulle.

THÉORÈME VI. — *Si une surface convexe C³ à courbure de Gauss positive, est tangente tout le long de son bord à une sphère dont le centre lui est intérieur (ou à la limite situé sur la surface) elle est G. R. [14].*

En effet

$$(\xi \wedge d\xi) \quad \text{et} \quad (\overline{\xi^* \wedge d\xi^*})$$

sont des vecteurs situés dans le plan tangent à F; si l'on place l'origine au centre de la sphère, l'intégrale de bord de (I₄) est nulle. On procède de même pour F* (remarquons que les sphères respectivement tangentes à F et F* ne sont pas supposées égales), l'intégrale de bord de (I₆) est nulle, donc aussi celle de (I₈).

5. CAS D'UNE SURFACE A BORD PLAN. — Nous allons maintenant examiner un cas où les calculs peuvent être considérablement allégés : celui où l'on peut trouver un vecteur fixe e tel que le produit scalaire (ξe) conserve un signe constant sur F. On multiplie scalairement les deux termes de (I₄) et de l'équation analogue pour F*, par e , on ajoute membre à membre les deux équations et l'on obtient pour l'intégrale de bord l'expression suivante :

$$\oint [(a - a^*)(e\dot{r} - e\dot{r}^*) - (b - b^*)(e\dot{\eta} - e\dot{\eta}^*)] ds.$$

Considérons par exemple une surface convexe (C³ et à K positive) à bord plan, de courbure intégrale inférieure à 2π , et qui se projette orthogonalement de façon biunivoque sur le plan du bord. Choisissons e perpendiculaire à ce plan, orienté vers le demi-espace qui contient la surface. Sans diminuer la généralité, on peut supposer le plan du bord de F* parallèle à celui de F. On a donc

$$(e\dot{r}) = (e\dot{r}^*) = 0.$$

L'intégrale ci-dessus se réduit à

$$\oint - (b - b^*)(e\dot{\eta} - e\dot{\eta}^*) ds.$$

Nous donnons ici une démonstration simple et géométrique de l'impossibilité pour cette intégrale d'être positive, et par suite de la R. G. de la calotte considérée.

Supposons le plan du bord perpendiculaire au plan de la feuille et soit xy sa trace; faisons coïncider sur la figure les points M et M* des bords (les plans normaux aux bords en ces points sont confondus avec le plan de la feuille); menons ξ et ξ^* supposées distinctes, normales aux surfaces en M et M*, et η et η^* les normales géodésiques. Portons sur ces vecteurs respectivement, les rayons de courbure géodésique MG et M*G* (ou MG*). Les surfaces étant isométriques, leur courbure géodésique est la même :

$$MG = MG^*.$$

Les centres de courbure normale : N et N* sont à l'intersection des normales ξ et ξ^* et des axes de courbure menés par G et G*, respectivement,

nulle, lorsqu'elles sont limitées par des courbes pour lesquelles s'annule l'intégrale de bord de l'équation de Herglotz. En effet :

Supposons deux surfaces, dont les bords satisfont à l'une des propriétés qui on fait l'objet des théorèmes IV, V, VI et sur lesquelles il existe un domaine à courbure de Gauss nulle (le reste étant à K positif), telles que :

1° il existe au moins un point qu'aucun plan tangent à F ne traverse, point que nous prendrons pour origine, de façon que le signe de $(r\xi)$ soit toujours négatif; de même pour F^* ;

2° les coefficients $B_{11}B_{22}$, B_{11}^* , B_{22}^* , soient toujours positifs, de sorte que les points figuratifs P et P^* (voir § 2) se trouvent sur la même nappe de Q (cône ou hyperboloïde à deux nappes). Les conditions de bord imposent

$$\iint_F f[(\xi r) + (\xi^* r^*)] do = 0,$$

(ξr) et $(\xi^* r^*)$ étant constamment négatifs, nous devons conclure

$$f = 0$$

et par suite aux relations (7) ou (7 bis) (voir le paragraphe 2, c de ce chapitre), où $\lambda > 0$.

Nous pouvons choisir les paramètres pour que $u^i = u^j = 1$ de sorte que B_{11} , B_{12} représentent les courbures normales dans les directions $u^i = \text{Cte}$.

Autrement dit : les courbures normales dans les directions qui se correspondent dans l'isométrie sont, pour le domaine à courbure de Gauss nulle, proportionnelles; en particulier les directions à courbure nulle (directions des génératrices pour une développable), se correspondent. D'où la conclusion :

Dans sa déformation, la surface définie précédemment conserve les droites contenues dans le domaine à courbure de Gauss nulle.

Remarquons que si la méthode ne permet pas d'obtenir des résultats plus complets relativement aux surfaces à $K = 0$, la R. G. est évidente dans certains cas : par exemple celui d'un cône ou d'un cylindre assujetti à rester tangent à une sphère,

7. MÉTHODE DE VARIATION DE L'ORIGINE. — Après ces quelques résultats qui découlent directement de l'équation de Herglotz mise sous la forme (I₇) ou (I₈), nous en obtiendrons un autre en abordant le problème sous un jour différent [15].

Considérons l'intégrale de bord de (I₄) :

$$\oint r(\xi \wedge d\xi - \overline{\xi^*} \wedge d\overline{\xi^*}).$$

On peut se poser la question suivante : soit l'intégrale de bord

$$\oint (OM dU),$$

OM étant le rayon vecteur du point M décrivant une courbe C, close, et U un vecteur aux composantes continûment différentiables par rapport à l'abscisse curviligne du point M. *Peut-on déterminer, U étant une fonction donnée, le lieu du point O pour lequel l'intégrale ci-dessus est nulle ?*

Procédons comme pour la recherche du barycentre, en posant

$$\oint (OM dU) = \oint (OO' dU) + \oint (O'M dU),$$

O' étant un point arbitraire, mais fixe.

On voit que

$$\oint (OM dU) = 0$$

si

$$(8) \quad O'O \oint dU = \oint O'M dU.$$

Ici nous avons :

$$dU = (\xi \wedge d\xi) - (\overline{\xi^* \wedge d\xi^*}).$$

Choisissons pour surface une calotte convexe, assujettie à rester tangente le long de son bord à un cylindre de révolution (le bord n'est pas supposé plan). L'image sphérique du bord est le grand cercle de la sphère unité, perpendiculaire à l'axe du cylindre. Fixons O' à l'intersection de la surface avec cet axe. $(\xi \wedge d\xi)$ est un vecteur parallèle à l'axe; soit i le vecteur unitaire dans cette direction, dirigé du côté opposé à la surface.

Pour plus de clarté dans la démonstration, sans compromettre les résultats, puisque nous supposons l'intégrale de bord nulle au départ, nous ferons décrire le bord par M, dans un sens tel que $(\xi \wedge d\xi)$ soit positif.

Le vecteur $(\overline{\xi^* \wedge d\xi^*})$ a, au moins en quelques points, une direction différente de celle de i (sinon, $d\xi$ et $d\xi^*$ font respectivement des angles égaux avec les tangentes à C et C*, les courbes bords sont donc congruentes, et d'après le théorème IV les calottes seraient égales).

On a

$$\oint |\xi \wedge d\xi| = \oint |d\xi| = \oint |d\xi^*| = 2\pi$$

et, par suite

$$\left| \oint \xi \wedge d\xi \right| > \left| \oint \overline{\xi^* \wedge d\xi^*} \right|,$$

il en résulte que le vecteur :

$$\oint \left[(\xi \wedge d\xi) - (\overline{\xi^* \wedge d\xi^*}) \right]$$

fait un angle aigu avec i .

D'autre part, le plan déterminé par i et $O'M$ est constamment perpendiculaire au plan tangent à F en M , d'où l'on déduit aisément :

$$O'M(\xi \wedge d\xi) > O'M(\overline{\xi^*} \wedge d\overline{\xi^*})$$

pour tout point M , d'où

$$\oint O'M(\xi \wedge d\xi) > \oint O'M(\overline{\xi^*} \wedge d\overline{\xi^*}).$$

D'après (8), le lieu de O est le plan perpendiculaire au vecteur

$$\oint d\mathbf{U}$$

mené sur ce vecteur à la distance algébrique

$$\oint O'M dU.$$

Ici, nous avons vu que dU fait avec i un angle aigu, et que

$$\oint O'M dU > 0.$$

Le plan cherché coupe la surface, ou le cylindre circonscrit la prolongeant. On peut choisir O quelconque à l'intérieur de la courbe d'intersection du plan et de la surface (ou de son prolongement). Pour que la démonstration soit complète, on procède de même pour F^* , le cylindre circonscrit n'ayant pas forcément le même rayon que pour F . On peut énoncer le théorème :

THÉOREME VIII. — *Une surface convexe C^3 , à courbure de Gauss positive, tangente tout le long de son bord à un cylindre de révolution, est G. R.*

CHAPITRE II.

Dans ce chapitre, nous traiterons de la rigidité infinitésimale (R. I.) de certaines surfaces à bords. Nous exposerons d'abord rapidement la méthode de W. Blaschke [7] laquelle, de même que celle de Herglotz, ramène la démonstration de la R. I. d'une surface C^3 , au fait que, sur son bord (supposé C^2), une certaine intégrale curviligne s'annule. Les surfaces qui ont fait l'objet des théorèmes IV à VIII, sont aussi I. R. comme l'ont prouvé ED. Rembs [16] et K. P. Grottemeyer [17].

1. DÉFINITION DE LA RIGIDITÉ INFINITÉSIMALE. — On considère une famille continue de surfaces $S_t (t > 0)$, et l'on désigne par S celle qui correspond à $t = 0$. Supposons que, quelle que soit la valeur du paramètre t , S et S_t soient homéomorphes. Soit M un point de S , ayant pour image M_t sur S_t .

Représentons S par

$$r(u, v)$$

[r continûment différentiable jusqu'au troisième ordre et $(r_u r_v) \neq 0$].

Soit $r^*(u, v, t)$ le rayon vecteur de M_t :

$$r^*(u, v, 0) = r(u, v).$$

Nous définissons la fonction $z(u, v, t)$ par la relation suivante :

$$(9) \quad r^*(u, v, t) = r(u, v) + tz(u, v, t).$$

z admet des dérivées partielles :

$$z_u(u, v, t) \quad \text{et} \quad z_v(u, v, t)$$

continues pour $t=0$. On suppose l'existence d'une limite pour $t \rightarrow 0$ de $z(u, v, t)$ et l'on pose

$$z(u, v, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} z(u, v, t),$$

On peut considérer $z(u, v, 0)$ comme le champ des « vitesses de déformation » de S.

Chaque courbe L de S a pour image une courbe L_t de S_t . Si, lorsque $t \rightarrow 0$, la longueur de L_t diffère de celle de L d'une quantité infiniment petite d'ordre supérieur à t , on dit qu'il y a *déformation infinitésimale*.

La déformation est dite « *triviale* » si le champ des vecteurs $z(u, v, 0)$ est un champ de vitesse d'un solide, la surface subit alors un déplacement global infiniment petit.

Si S ne peut subir que des déformations triviales, on dit qu'elle est *infinitésimalement rigide* (I. R.).

2. FORMULE DE BLASCHKE. — Nous traduirons la condition de déformation infinitésimale de S en formant les éléments linéaires de F et F_t . Pour simplifier les notations nous remplaçons (9) par

$$r^* = r(u, v) + tz(u, v).$$

Nous supposons que $z(u, v)$ a des dérivées partielles des trois premiers ordres définies et continues.

L'élément linéaire de L_t a pour expression

$$ds^2 = dr^2 + 2t dr dz + t^2 dz^2.$$

La condition nécessaire et suffisante de déformation infinitésimale est donc

$$(10) \quad dr dz = 0.$$

Remarque. — La condition précédente est une condition de déformation de premier ordre. On définit de même des déformations d'ordre 2, 3, ... ou

même infini, suivant que les éléments linéaires de S et S_t diffèrent d'une quantité infiniment petite d'ordre supérieur à t^2 , t^3 , ... ou t^n avec n infini. Dans ce dernier cas on dit qu'il y a déformation analytique.

Revenons aux déformations du premier ordre; l'équation (10) est équivalente aux trois relations suivantes :

$$\begin{aligned} r_u z_u &= 0, \\ r_u z_v + r_v z_u &= 0, \\ r_v z_v &= 0. \end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe un vecteur y tel que

$$\begin{aligned} z_u &= y \wedge r_u, \\ z_v &= y \wedge r_v, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$(11) \quad dz = y \wedge dr.$$

Si y est un vecteur constant, on a

$$z = a \wedge r + b,$$

où a et b sont des vecteurs fixés : la déformation dans ce cas est triviale.

Pour prouver la R. I. d'une surface il suffit donc de montrer que y est un vecteur constant.

3. Nous résumons maintenant la méthode de Blaschke, qui démontre la rigidité des surfaces closes convexes, à courbure de Gauss positive.

De (11) on tire

$$r \wedge dy = dz + d(r \wedge y)$$

et de

$$z_{uv} = z_{vu},$$

on tire

$$(12) \quad y_v \wedge r_u = y_u \wedge r_v,$$

les quatre vecteurs r_u , r_v , y_u , y_v , sont donc coplanaires et l'on peut poser

$$(13) \quad \begin{cases} y_u = \alpha r_u - \beta r_v, \\ y_v = \gamma r_u - \delta r_v, \end{cases}$$

α , β , γ , δ étant des scalaires, avec de plus, d'après (12) :

$$\delta = \alpha.$$

Si nous développons

$$y_{uv} = y_{vu}$$

en tenant compte des relations (13), il vient

$$(14) \quad B_{11} \gamma - 2 B_{12} \alpha + B_{22} \beta = 0.$$

Les B_{ij} étant toujours les coefficients de la seconde forme fondamentale.

La courbure de Gauss étant positive, on a

$$(15) \quad B_{11}B_{22} - (B_{12})^2 > 0,$$

de (14) et (15) on tire

$$(16) \quad \beta\gamma - \alpha^2 < 0.$$

En effet, si l'on pose

$$\begin{aligned} B_{11} &= X, & \beta &= X', \\ B_{12} &= Y, & \alpha &= Y', \\ B_{22} &= Z, & \gamma &= Z', \end{aligned}$$

la relation (14) exprime que les points $A(X, Y, Z)$ et $A'(X', Y', Z')$ sont conjugués par rapport au cône du second degré

$$XZ - Y^2 = 0,$$

(15) signifie que A est intérieur au cône, il en résulte bien que A' est extérieur, c'est-à-dire (16).

Si, maintenant, (15) étant posée, on a

$$\beta\gamma - \alpha^2 = 0$$

c'est que, nécessairement, A' est au sommet du cône, d'où

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

On transforme ensuite l'intégrale du « volume mixte » de Minkowski :

$$\iint (r, y_u, y_v) du dv.$$

On trouve, d'une part, qu'elle est égale à

$$\frac{1}{2} \oint (r, y, dy)$$

et d'autre part, d'après les relations (13), qu'elle peut s'écrire

$$\iint (\beta\gamma - \alpha^2) (r, r_u, r_v) du dv,$$

d'où la relation

$$\oint (r, y, dy) = 2 \iint_s (\beta\gamma - \alpha^2) (r, r_u, r_v) du dv$$

$\oint (r, y, dy)$ est l'intégrale de Blaschke.

On peut choisir l'origine à l'intérieur de la surface, de façon que le produit mixte

$$(r, r_u, r_v)$$

conserve un signe constant, et les lignes coordonnées de sorte que, par exemple, cette expression soit toujours positive.

Si l'intégrale de bord du premier membre s'annule, c'est que, nécessairement

$$(\beta\gamma - \alpha^2) = 0$$

et, d'après ce que nous avons vu plus haut, ceci entraîne l'annulation des scalaires $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Les équations (13) montrent alors que γ est un vecteur fixe, la déformation infinitésimale est triviale.

Nous aurons par conséquent démontré qu'une surface est I. R., si nous prouvons que pour toute déformation infinitésimale l'intégrale de Blaschke :

$$\oint (r, \gamma, dy)$$

est nulle.

4. R. I. DES SURFACES A BORDS R. — A. Outre les surfaces convexes closes pour lesquelles l'intégrale de Blaschke disparaît, on a prouvé que les surfaces convexes à bords tangentes le long de leurs bords à un plan, à un cône ou à un cylindre sont I. R. (si elles sont C^3 et à $K > 0$) ([16] et [17]).

Nous allons prouver la R. I. d'une surface de classe R définie comme suit :

- a. la surface est C^3 et son bord est C^2 ;
- b. la courbure de Gauss est positive sauf en des points isolés, où elle peut être nulle;
- c. la surface est convexe, c'est-à-dire qu'elle est un domaine connexe à la frontière d'un corps convexe;
- d. l'image sphérique de la surface recouvre toute la sphère unité, une seule fois (la courbure intégrale de la surface est 4π);
- e. tout le long de son bord elle est tangente à une surface cylindrique; l'image sphérique du bord est un arc de grand cercle de la sphère unité (parcouru deux fois); chaque génératrice du cylindre rencontre le bord de la surface en deux points, distincts ou confondus.

B. Montrons d'abord l'existence de surfaces R, en construisant une de ces surfaces, à partir d'éléments géométriques simples, qui peuvent aisément se remplacer par d'autres moins particuliers.

Donnons-nous dans un plan P deux droites parallèles G et G', et un demi-cylindre de révolution, ayant son axe dans P, et limité aux deux génératrices G et G'. Sur ce demi-cylindre traçons une courbe B, qui soit C^2 , tangente en A et A' à G et G' respectivement, et convexe. B se projette sur P suivant une courbe B', jouissant des mêmes propriétés.

Soit M un point de B qui se projette orthogonalement en M' sur B'. Nous construisons tous les quarts de cercle ayant pour centres les points M', de rayons M'M, situés dans des plans parallèles à G et perpendiculaires à P.

On limite ces quadrants par les rayons $M'M$ d'une part, et $M'M''$ d'autre part (M'' étant dans P opposé à AA' par rapport à M'). Le point M'' décrit dans P une courbe convexe B'' qui est aussi C^3 et tangente en A et A' à G et G' . La surface engendrée par ces quarts de cercle constitue une partie de la surface R , celle qui contient le bord B , tangente le long de B au demi-cylindre. Il reste à compléter cette partie par une surface convexe C^3 située de l'autre côté de B par rapport à P ; admettant le long de B'' des plans tangents perpendiculaires à P , et se raccordant avec l'autre partie de façon à former une surface C^3 partout. Ce qui est possible d'une infinité de manières.

C. Nous supposons que R a sur son bord une courbure de Gauss partout positive, sauf aux points où les génératrices lui sont tangentes : en effet, ces points A et A' ont pour images sphériques les extrémités de l'arc-image du bord ; le plan tangent à R est donc stationnaire en ces points (plan osculateur à B) ; la direction de la génératrice tangente est donc asymptotique double et la courbure de Gauss est nulle en A et A' .

Développons sur un plan la surface cylindrique tangente à R , comprise entre les deux génératrices limites G et G' . On obtient ainsi une courbe plane, qui est une figure invariable dans la déformation, puisque sa longueur est invariable de même que sa courbure en chaque point (courbure géodésique de la surface).

D'autre part, les points A et A' demeurent les seuls points où $K = 0$, puisque K est conservée. Les génératrices G et G' sont donc également conservées, de même que toutes les génératrices coupant B . Celles-ci occupent des positions invariables par rapport à la courbe plane, donc aussi par rapport à B elle-même.

Sans diminuer la généralité, on peut supposer fixe la direction des génératrices, et soit u le vecteur unitaire porté par ces droites. On pose

$$r^* = r + tz,$$

ξ , le vecteur unitaire de la normale à la surface, devient après la déformation

$$\xi + t\omega.$$

En exprimant que ce vecteur est normal à

$$dr^* = dr + t dz$$

et en utilisant la relation (11) :

$$dz = y \wedge dr$$

on trouve aisément

$$\omega = y \wedge \xi.$$

Exprimons en outre que le nouveau vecteur normal est perpendiculaire à u , il vient

$$(17) \quad (y, \xi, u) = 0.$$

D'autre part, puisqu'il ne peut y avoir de déplacement des points de B le long

des génératrices tangentes, écrivons que leur déplacement est perpendiculaire à u :

$$(z, u) = 0,$$

d'où en différentiant

$$(dz, u) = 0$$

et en tenant compte de (11) :

$$(18) \quad (y, dr, u) = 0.$$

De (17) et de (18) résulte que y doit se trouver à la fois :

— dans le plan déterminé par u et dr ;

— dans le plan déterminé par u et ξ ;

or, u et ξ sont toujours distincts, puisque u appartient au plan tangent; u et dr sont distincts excepté en A et en A' . Sauf en ces derniers points où y est indéterminé dans le plan $(u\xi)$, y est nécessairement parallèle à u , et l'on a

$$y = \mu u,$$

où μ est un scalaire, et

$$dy = d\mu u,$$

y et dy sont donc partout, sauf en deux points isolés, deux vecteurs colinéaires. Par conséquent l'intégrale de Blaschke est nulle :

$$\oint (r, y, dy) = 0,$$

on peut énoncer le théorème :

THÉORÈME IX. — Une surface R est I. R.

Dans le chapitre VI, nous montrerons que les surfaces R font partie d'une classe plus large de surfaces convexes à bords, qui sont toutes G. R.

CHAPITRE III.

Au cours de la discussion du signe de la forme f (chap. I, § 2) nous avons constaté que la méthode de Herglotz ne peut s'appliquer aux surfaces à courbure de Gauss négative. D'autre part, même pour les surfaces à courbure de Gauss positive, nous n'avons obtenu que des résultats partiels; par exemple, le théorème VI n'affirme la R. G. d'une surface C^3 à $K > 0$, tangente à une sphère le long de son bord, que si le centre de la sphère n'est traversé par aucun plan tangent à la surface (à la rigueur il peut se trouver sur la surface elle-même). Cependant d'après le théorème V la R. G. existe si la sphère a un rayon infiniment grand (bord plan parabolique) donc un centre non intérieur à la surface considérée. Il est à prévoir que la R. G. existe quelle que soit la position du centre de la sphère tangente.

Si la méthode de Herglotz est à elle seule impuissante à nous conduire à ce résultat, elle ne nous interdit pas non plus de l'imaginer, sa faiblesse provenant justement de ce que, contrairement à la méthode de Blaschke pour la R. I., on ne peut pas conclure à la non-rigidité dans les cas où l'on ne conclut pas à la R. G.

Nous démontrerons dans tous les cas la R. G. d'une surface tangente le long de son bord à une sphère si elle est convexe et C^2 (dans le voisinage du bord).

Nous utiliserons pour cela le théorème de Pogorelov :

Toute surface convexe est G. R.

1. R. G. D'UNE SURFACE CONVEXE TANGENTE A UNE SPHÈRE LE LONG DE SON BORD. — Soient deux surfaces convexes, isométriques, F et F^* , à bords connexes C^2 , B et B^* , tangentes tout le long de ces bords respectivement à deux sphères σ et σ^* , de rayons ρ et ρ^* . B et B^* sont donc homothétiques de leurs images sphériques respectives b et b^* , dans les rapports $\frac{1}{\rho}$ et $\frac{1}{\rho^*}$. Soient L et L^* les longueurs de B et B^* ; l et l^* celles de b et b^* ; R et R^* les rayons de courbure géodésique de B et B^* ; r et r^* ceux de b et b^* .

On a

$$\begin{aligned} L &= \frac{l}{\rho}, \\ l^* &= \frac{L^*}{\rho^*}, \\ r &= \frac{R}{\rho}, \\ r^* &= \frac{R^*}{\rho^*}. \end{aligned}$$

Or

$$L = L^*, \quad R = R^*$$

D'où

$$\frac{l}{l^*} = \frac{\rho^*}{\rho}, \quad \frac{r}{r^*} = \frac{\rho^*}{\rho}.$$

De ces deux dernières égalités, il résulterait, si

$$\rho \neq \rho^*$$

que les deux courbes b et b' sur la sphère unité sont semblables, ce qui est impossible. Il faut donc poser

$$\rho = \rho^*.$$

Les courbes b et b^* sont égales, il en est évidemment de même de B et B^* , portées par des sphères égales.

2. Il reste à prouver la R. G. dans le cas où les sphères tangentes sont égales.

Considérons les surfaces S et S^* obtenues en collant à F et F^* , respectivement, les domaines sphériques intérieurs à B et B^* , qui prolongent F et F^* .

Ce sont des surfaces closes convexes, C^1 le long de B et B^* . D'après le théorème de Pogorelov, les surfaces closes convexes isométriques S et S^* sont égales (ou symétriques), il en est évidemment de même de F et F^* . Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME X. — *Une surface convexe, C^2 , tangente tout le long de son bord à une sphère est G. R.*

CHAPITRE IV.

Ce chapitre est tout entier consacré aux surfaces à bords, convexes, de courbure intégrale 4π .

Nous prouverons d'abord l'existence de telles surfaces, que nous appellerons surfaces Σ .

Nous montrerons ensuite, si ces surfaces sont ou moins C^2 , que leur image sphérique recouvre toute la sphère unité, une fois et une fois seulement.

Nous en déduirons une propriété caractéristique de leurs bords qui permet de montrer que les surfaces Σ sont G. R. Comme autre conséquence importante, nous retrouverons un théorème de A. D. Alexandrov [18] sur les surfaces T définies de la façon suivante :

Ce sont des surfaces homéomorphes au tore, constituées de deux domaines à courbures de Gauss opposées, séparés par deux lignes connexes différentiables par morceaux (avec un nombre fini de discontinuités) sur lesquelles la courbure de Gauss est nulle.

Alexandrov a prouvé, que si la partie convexe ($K > 0$), a une courbure intégrale égale à 4π , c'est que les deux lignes sont planes, et situées dans des plans tangents à T .

Nous donnerons de ce théorème une démonstration très simple, et nous montrerons que les surfaces T constituent un cas limite d'une classe plus générale de surfaces.

Indiquons que A. D. Alexandrov a démontré, dans le même Ouvrage cité, que toute surface T analytique est G. R.

H. Liebmann [19] avait prouvé en 1901 la R. I du tore qui est une surface T . Ces deux résultats, quoique de portée restreinte, méritent d'être signalés, car ce sont à peu près les seuls qui aient été obtenus sur la rigidité de surfaces à courbure de Gauss non positive.

1. EXISTENCE DES SURFACES Σ . — Nous montrons d'abord que des surfaces Σ existent. Nous en avons déjà rencontré : les surfaces à bord plan-parabolique du chapitre I, les surfaces R définies au chapitre II en font partie.

Par la suite (§ 7) nous considérerons des surfaces homéomorphes au tore, que nous appellerons surfaces U , dont un morceau connexe répond à la définition des surfaces Σ . Il nous suffira donc de montrer l'existence des surfaces U et de définir sur elles le domaine qui constitue une surface Σ , pour prouver l'existence de celles-ci.

Nous donnerons une construction à partir de figures élémentaires, mais on peut sans peine trouver d'autres surfaces moins particulières.

Soit une courbe plane convexe, un cercle L par exemple, et son axe Z ; de part et d'autre du plan du cercle donnons-nous deux surfaces cylindriques D et D' , symétriques, à projection biunivoque sur le plan du cercle, convexes et tournant leur concavité vers le plan. Le cercle est entièrement intérieur au corps convexe limité par les développables D et D' . Chaque plan passant par Z coupe L en deux points C et C' , et D et D' soit suivant des arcs de courbes convexes, soit suivant des droites. Dans chacun de ces plans il existe deux cercles γ et γ' de centres respectifs C et C' , tangents intérieurement à D et D' tous les deux. On montre qu'on peut choisir d'une infinité de façons la position de D et D' et le rayon de L , pour que, d'une part, γ et γ' ne se coupent jamais, et que, d'autre part, la surface Γ engendrée par les arcs de γ limités à leurs points de contact avec les développables, les plus éloignés de Z , soit convexe et au moins de classe C^1 .

Les cercles γ en entier engendrent une surface homéomorphe à un tore, U , qui touche les développables suivant deux courbes connexes fermées B et B' .

Considérons la surface close formée en collant à Γ le long de ses bords B et B' les domaines de D et D' intérieurs à B et B' : c'est une surface convexe, $\bar{U}$ (U est situé à l'intérieur du corps convexe limité par cette surface). Sa courbure intégrale est donc 4π ; or, celle des parties de D et D' est nulle, il faut en conclure que la partie de U située sur cette surface close a une courbure intégrale égale à 4π , l'image sphérique recouvrant toute la sphère unité une fois et une fois seulement; c'est donc bien une surface Σ définie plus haut.

2. QUELQUES DÉFINITIONS. — Dans la suite de ce chapitre nous utiliserons différentes notions que nous allons définir :

A. On appelle *plan d'appui* d'une surface, tout plan ayant au moins un point commun avec la surface, celle-ci étant entièrement située d'un même côté du plan.

W. Blaschke [20] a montré que :

Par tout point d'une surface convexe passe au moins un plan d'appui.

Si une surface convexe est C^1 , par chacun de ses points passe un plan d'appui et un seul : le plan tangent.

B. On appelle *enveloppe convexe* d'un corps C , un corps E qui, parmi tous les

corps convexes contenant C , est le plus petit, c'est-à-dire est contenu dans tous les autres. L'enveloppe convexe d'un corps convexe est ce corps lui-même.

Tout plan d'appui d'un corps est plan d'appui de son enveloppe convexe.

3. LEMMES I ET II, THÉOREME XI. — Nous démontrerons maintenant que si une surface à bords est convexe, et possède une courbure intégrale égale à 4π , son image sphérique recouvre la sphère unité une fois, en son entier. Supposons qu'il existe une telle surface dont l'image sphérique ne recouvre pas toute la sphère unité : il y aura donc une partie ω' de la sphère recouverte deux fois et une partie ω'' non recouverte.

LEMME I. — *Si, sur une surface convexe C^1 il existe deux ou plusieurs points admettant le même point image, ou bien ces points sont confondus, ou bien les plans tangents en ces points sont confondus.*

Nous éliminerons tout de suite la première conclusion, évidente; et nous supposerons que les deux points M et M' distincts, admettent deux plans tangents distincts P et P' , et la même image m . En un point d'une surface et en son point image, les plans tangents sont parallèles : il en résulte que P et P' sont parallèles. L'un d'eux recoupe alors la surface, soit P . Or d'après le paragraphe 2(A), tout plan tangent à une surface convexe est plan d'appui, et ne peut par conséquent couper la surface : P est nécessairement confondu avec P' (M et M' ne sont pas nécessairement confondus),

LEMME II. — *Si deux domaines connexes d'une même surface C^1 convexe sont distincts, et ont pour image le même domaine de la sphère unité, l'aire de ce domaine est nulle.*

D'après un théorème de Hadamard [24], il y a correspondance biunivoque entre une surface close convexe et sa représentation sphérique; un voisinage entourant m , suffisamment petit mais d'aire non nulle, serait l'image de deux voisinages distincts, d'aire non nulle, entourant M et M' . D'après le lemme I les plans tangents aux points de même image seraient confondus. Or, il est impossible que deux surfaces distinctes convexes aient en commun tous leurs plans tangents sans qu'elles soient confondues. Les domaines d'images sphériques confondues ne peuvent être que des lignes ou des points dont l'image est, par conséquent, réduite elle aussi à une ligne ou un point : ω' a une aire nulle, ainsi que ω'' ; on peut donc énoncer le théorème :

THÉOREME XI. — *Si une surface à bords est convexe et C^2 , et de courbure intégrale égale à 4π (surface Σ), son image sphérique recouvre toute la sphère unité, une seule fois.*

L'image sphérique b du bord B , ne peut être une courbe enfermant une aire

non nulle, toujours à cause de l'application biunivoque sur la sphère unité : c'est un arc de courbe, parcouru un nombre pair de fois, qui peut même se réduire à un point (cas du bord plan-parabolique).

Puisque les plans tangents aux points de même image sont confondus, la développable de bord D est tangente à Σ en un ou plusieurs points du bord B , lequel est une courbe fermée décrite sur cette développable. Le domaine enfermé sur D par B est une surface convexe (mais pas nécessairement un domaine convexe, c'est-à-dire limité par une courbe close convexe, si on l'applique sur un plan); collé à Σ le long de B , il détermine avec Σ une surface close convexe et le corps limité par cette surface est l'enveloppe convexe de Σ .

Remarque. — Les génératrices de D rencontrent B un nombre pair de fois, ou lui sont tangentes. Dans l'hypothèse où la courbure de Gauss est définie en tout point de Σ qui est alors C^2 , aux points où une génératrice est tangente à B , comme nous l'avons déjà remarqué à propos des surfaces R (chap. II, § 4, C), la courbure de Gauss est nécessairement nulle puisque le plan tangent est osculateur à B .

Remarquons aussi que, si nous supposons que Σ possède une courbure de Gauss positive sur un ensemble dense, les génératrices de D ne peuvent rencontrer B en plus de deux points : en effet, si l'une de ces droites G coupait B en quatre points P, Q, R, S , le segment QR serait soit extérieur à Σ , ce qui contredit l'hypothèse de convexité, soit sur Σ qui renfermerait alors des ensembles denses de points à courbure nulle. Cette éventualité n'est cependant pas exclue dans le théorème de rigidité qui va suivre.

4. RIGIDITÉ DES SURFACES Σ . — Ici nous supposerons les surfaces Σ bordées par des courbes C^2 .

Soient deux surfaces Σ et Σ^* isométriques; nous supposerons pour simplifier, qu'elles possèdent chacune un seul bord, B et B^* respectivement (la démonstration est rigoureusement la même si elles en ont plusieurs). Soient D et D^* les portions de développables tangentes à Σ et Σ^* le long de B et B^* . Si nous appliquons ces domaines sur un plan nous obtenons deux courbes planes B_1 et B_1^* possédant en chaque point même courbure géodésique, et de même longueur : ces deux courbes planes sont donc égales (ou symétriques). Si nous collons les domaines intérieurs à B et B^* respectivement à Σ et Σ^* nous obtenons des surfaces closes convexes $\bar{\Sigma}$ et $\bar{\Sigma}^*$. Si nous leur appliquons le théorème de Pogorelov sur la R. G. des surfaces closes convexes quelconques, Σ et $\bar{\Sigma}^*$, isométriques d'après leur construction, sont égales ou symétriques; il en est évidemment de même de Σ et Σ^* . Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME XII. — Une surface Σ à bord C^2 est G. R.

Nous venons de démontrer que ces surfaces sont G. R. à l'intérieur de la

classe des surfaces Σ . La remarque suivante nous permettra d'énoncer un théorème de rigidité avec un peu moins de conditions.

Si nous appliquons la formule de Gauss-Bonnet à une surface Σ :

$$\oint \frac{ds}{R_g} = 2\pi - \iint d\omega,$$

ds étant l'élément linéaire du bord ;

R_g le rayon de courbure géodésique ;

$\iint d\omega$ l'aire de l'image sphérique de toute la surface ;

on trouve

$$\oint \frac{ds}{R_g} = -2\pi.$$

Considérons une surface Σ , et déformons-la (le bord est toujours C^2) : ds et R_g étant des invariants de déformation isométrique, l'intégrale de bord est toujours égale à 2π , d'où l'on déduit pour la surface déformée

$$\iint d\omega = 4\pi.$$

Il n'est donc pas nécessaire d'imposer à l'isométrique de Σ d'être aussi une surface Σ . Pour plus de précision, on doit énoncer le théorème de rigidité sous la forme suivante :

THÉORÈME XIII. — *Une surface Σ de bord C^2 , est l'égale (ou la symétrique) de toute surface isométrique, pourvu que cette dernière soit convexe.*

En particulier, le théorème de Rembs (théorème V), sur la R. G. des surfaces à bords plans paraboliques, est contenu dans le théorème précédent, avec des conditions beaucoup plus larges.

5. **THÉORÈME D'A. D. ALEXANDROV.** — Considérons maintenant une surface homéomorphe au tore, dont une partie à courbure de Gauss positive une courbure intégrale égale à 4π et est séparée du reste de la surface (à courbure de Gauss négative) par deux courbes fermées connexes, C^2 par morceaux (avec un nombre fini de discontinuités), sur lesquelles la courbure de Gauss est nulle.

Nous appellerons T une telle surface et nous désignerons respectivement par T^+ et T^- suivant le signe de la courbure, ses deux parties séparées par les deux courbes B et B' .

Montrons d'abord que T^+ est une surface Σ , c'est-à-dire :

1° que son image sphérique recouvre toute la sphère unité. En effet, soit ω^+ la courbure intégrale de T^+ , et ω^- celle de T^- ; on a

$$\omega^+ + \omega^- = 2\pi\chi,$$

où χ est la caractéristique d'Euler-Poincaré, qui vaut ici zéro. Or, une surface close, partout C^2 , doit admettre un plan d'appui, au moins, perpendiculaire à toute direction donnée arbitrairement. Par suite, ω^+ doit recouvrir au moins une fois la sphère unité; si ω^+ égale 4π , elle la recouvre une fois et une seule (cas du tore);

2° qu'elle est convexe. Pour cela nous montrerons que chacun de ses plans tangents est un plan d'appui pour T^+ et pour la surface T tout entière.

Supposons qu'un plan tangent P en un point M de T^+ , recoupe T , découpant ainsi deux surfaces finies à bords plans; soit E l'une de ces surfaces, nous savons que :

- a. tous les points de E ne peuvent avoir une courbure négative;
- b. il existe au moins un point M' de E où le plan tangent est parallèle à P et la courbure en ce point est soit positive, soit nulle.

Dans le cas où elle est positive, il existerait alors deux points de T^+ distincts ayant même image sphérique, et ceci se produirait pour tous les points d'un petit voisinage de M , ce qui est impossible d'après le 1°.

Dans le cas où elle est nulle, il existe encore un petit voisinage ϵ de M pour tout point duquel le plan tangent n'est pas plan d'appui. Les points tels que M' , occupent un petit voisinage de M' : ϵ' . Or parmi tous les points de ϵ' il en existe certainement où la courbure est positive, puisque les points à courbure nulle sont sur un petit arc de B (ou de B') intérieur à ϵ' : nous sommes donc ramenés au cas précédent.

On démontre de même que P ne peut toucher T en un autre point que M .

Nous pouvons conclure que T^+ (*muni des deux bords B et B'*) est une surface Σ , et en outre que l'enveloppe convexe de T^+ est l'enveloppe convexe de T tout entière.

6. Nous allons maintenant prouver que B et B' sont des courbes planes.

Considérons T^+ muni de ses deux bords B et B' ; soit D et D' les développables tangentes à T^+ le long de B et B' . En chaque point de B (le même raisonnement étant valable pour B') la tangente à B et la génératrice G de B sont deux directions conjuguées sur T . Or, la courbure de Gauss est nulle sur B , donc l'une de ces directions est direction asymptotique double : ce ne peut être G car aucune des courbes de T qui lui sont tangentes ne traverse le plan tangent, puisque ce dernier est plan d'appui de T ; ce ne peut être que la direction de la tangente à B , or B appartient aussi à D , et, si en tout point de B , la direction tangente est parabolique, distincte des génératrices de D , c'est que D est plane (¹).

(¹) On peut aussi raisonner de la façon suivante : on sait que si deux surfaces sont tangentes tout le long d'une ligne B , les indicatrices de Dupin aux différents points de B sont bitangentes. Les paraboles de Dupin de D et T ont en général des axes distincts, il faut donc que cet axe soit indéterminé sur D , c'est-à-dire que D soit plane.

On peut donc énoncer le théorème suivant qui complète légèrement le théorème d'Alexandrov en présentant la valeur 4π comme un minimum :

THÉOREME XIV. — *Dans une surface homéomorphe à un tore, constituée de deux parties connexes, à courbures de Gauss opposées, séparées par deux lignes fermées distinctes, différentiables par morceaux, la partie ayant une courbure positive a une courbure intégrale au moins égale à 4π , et dans ce cas les deux lignes frontières sont planes, situées dans des plans tangents à la surface.*

A. D. Alexandrov, dans l'article cité [18] a donné une construction d'une surface T quelconque.

7. REMARQUE SUR LA COURBURE INTÉGRALE D'UNE SURFACE U. — Les surfaces T se présentent donc comme un cas limite des surfaces U définies au paragraphe 4 de ce chapitre. Supposons la courbure de Gauss définie partout sur U et désignons par U^+ et U^- les parties de U de courbure respectivement positive et négative, et par ω^+ et ω^- leurs courbures intégrales. Nous avons toujours

$$\begin{aligned}\omega^+ + \omega^- &= 0, \\ \omega^+ &\geq 4\pi.\end{aligned}$$

Quand ω^+ est supérieur à 4π , les courbes bords de la surface Σ portée par U, ne sont plus les lignes frontières entre U^+ et U^- ; U^+ , bien qu'ayant partout une courbure positive n'est pas convexe car ses plans tangents ne sont pas tous plans d'appui.

Remarque. — On peut se demander dans ce dernier cas quelle est l'aire maximum de la sphère unité recouverte par l'image sphérique de la surface U^+ moins Σ . L'exemple suivant montre que cette image sphérique peut recouvrir encore une fois la sphère unité :

Soit un cercle de diamètre AB, considérons toutes les cordes CD perpendiculaires à AB et coupées par AB en M; décrivons les cercles de diamètres CM et MD, situés dans des plans perpendiculaires à AB. Ces cercles engendrent une surface à courbure de Gauss partout positive, sauf sur AB où elle est nulle. Fendons cette surface le long de AB en maintenant toutefois les deux moitiés aux points A et B. Nous avons une surface évidemment non différentiable en A et B, de courbure intégrale égale à 8π . Nous pouvons, en coupant cette surface aussi près qu'on veut de A et de B de part et d'autre de AB, et en raccordant les deux parties ainsi détachées par des surfaces C^1 où les domaines de courbures opposées soient connexes, obtenir une surface U. Sur celle-ci

$$\omega^+ = 8\pi - \varepsilon,$$

ε étant aussi petit qu'on veut.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] EISENHART, *Riemannian Geometrie*, Princeton University Press, 1949.
- [2] CAUCHY, *Sur les polygones et les polyèdres* (second Mémoire).
- [3] H. WEYL, *Sur la rigidité des surfaces et polyèdres convexes* (*Sitzungsberichte der Phys. Math.*, 1917, p. 250).
- [4] HERGLOTZ, *Sur la rigidité des surfaces convexes closes* (*Abhang. Math. Sem. Hans.*, t. 15, 1943, p. 127-129).
- [5] POGORELOV, *Rigidité globale des surfaces convexes quelconques* (*Publications de l'Académie des Sciences d'Ukraine, Kiev*, 1952).
- [6] G. DARBOUX, *Théorie générale des surfaces*, Gauthier-Villars, 2^e éd., 1915.
- [7] W. BLASCHKE, *Rigidité des surfaces closes convexes* (*Math. Z.*, 1921, p. 141).
- [8] A. D. ALEXANDROV, *Géométrie intrinsèque des surfaces convexes*, Akademie Verlag, Berlin, 1955.
- [9] J. HADAMARD, *Sur les surfaces à courbure positive* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 31, 1903, p. 300-301).
- [10] Ed. REMBS, *Sitz. Preuss Ak. Phys. Math.*, 1931, p. 125.
- [11] K. P. GROTEMEYER, *Math. Z.*, Bd 55, 1952, p. 253-268.
- [12] K. P. GROTEMEYER, *Math. Z.*, Bd 58, 1953, p. 41-45.
- [13] Ed. REMBS, *Math. Z.*, Bd 56, 1952, p. 271.
- [14] S. GOHIER, *C. R. Acad. Sc.*, t. 238, 1954, p. 1859.
- [15] S. GOHIER, *C. R. Acad. Sc.*, t. 241, 1954, p. 154.
- [16] Ed. REMBS, *Bayerische Ak. der Wissenschaften*, 1954, p. 315.
- [17] GROTEMEYER, *Math. Z.*, Bd 59, 1953, p. 278.
- [18] ALEXANDROV, *Sur une classe de surfaces fermées* [*Math. Sbornik*, t. 4 (46), n° 1, 1938, p. 69].
- [19] H. LIEBMANN, *Gottingen nacht.*, 1901, p. 39-53.
- [20] W. BLASCHKE, *Kreis und Kugel*, Leipzig, Verlag von Veit & Comp., 1916.
- [21] J. HADAMARD, *Sur certaines propriétés des trajectoires en dynamique* [*J. Math. pures et appl.*, (5), t. 3, 1897].



DEUXIÈME THÈSE



PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Problèmes de Cauchy pour les équations d'Einstein
du cas intérieur, raccordement avec le cas extérieur.



Vu et approuvé :

Paris, le 26 mai 1956.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

J. PÉRÈS.

Vu et permis d'imprimer :

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

JEAN SARRAILH.



PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS

Quai des Grands-Augustins, 55

154 293-59

Dépôt légal, Imprimeur, 1959, n° 1314.

Imprimé en France.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS

154293 Quai des Grands-Augustins, 55.

Imprimé en France.